

CHUYÊN ĐỀ 1 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NHỚ

I. Một số công thức lượng giác cần nhớ

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$

2) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}; \tan x = \frac{1}{\cot x}.$

3) Công thức cộng:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

4) Công thức nhân đôi: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

5) Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

6) Công thức nhân ba:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

7) Công thức biểu diễn theo tanx:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}; \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}; \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

8) Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) + \cos(a + b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a - b) + \sin(a + b))$$

9) Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

B. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Dạng 1. Phương trình bậc hai.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

2) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$

3) $3\cot 2x + \sqrt{3} = 0$

4) $\sqrt{2}\sin 3x - 1 = 0$

5) $\sqrt{2}\cos x + \sin 2x = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

3) $2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$

4) $\cos 2x - 5\sin x + 6 = 0$

5) $\cos 2x + 3\cos x + 4 = 0$

6) $4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$

7) $2\sin^2 x - \cos x + \frac{7}{2} = 0$

8) $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$

9) $2\sin^2 x + 5\cos x = 5.$

Bài 3. Giải các phương trình:

1) $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$

3) $9\cos^2 x - 5\sin^2 x - 5\cos x + 4 = 0$

3) $5\sin x(\sin x - 1) - \cos^2 x = 3$

4) $\cos 2x + \sin^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

5) $3\cos 2x + 2(1 + \sqrt{2} + \sin x)\sin x - (3 + \sqrt{2}) = 0$

6) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

7) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3\cot x + \sqrt{3}$

8) $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

9) $\frac{\cos x(\cos x + 2\sin x) + 3\sin x(\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1.$

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $4\sin x - 3\cos x = 2$

2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$

3) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$

4) $\sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x = \sqrt{2}$

5) $5\cos 2x - 12\cos 2x = 13$

6) $3\sin x + 4\cos x = 5$

Bài 2. Giải các phương trình:

1) $\sqrt{3}\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$

2) $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$

3) $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$

4) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$

5) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$

Dạng 3. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sin và cosin.

1) $\sin 2x + 2\sin x \cos x + 3\cos 2x - 3 = 0$

2) $\sin 2x - 3\sin x \cos x + 1 = 0.$

3) $4\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos 2x = 2\sin 2x + \frac{5}{2}.$

4) $3\sin^2(3\pi - x) + 2\sin(\frac{5\pi}{2} + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 5\sin^2(\frac{3\pi}{2} + x) = 0.$

$$5) a) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x};$$

$$b) 4 \sin x + 6 \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

$$6) \cos 2x - 3 \sin x \cos x - 2 \sin 2x - 1 = 0$$

$$7) 6 \sin 2x + \sin x \cos x - \cos 2x = 2.$$

$$8) \sin 2x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos 2x = 0$$

$$9) 4 \sin 2x + \sin x \cos x + 3 \cos 2x - 3 = 0.$$

$$10) \sin^2 x - 4\sqrt{3} \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 5.$$

Dạng 4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx:

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$1) (2 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - 2 \sin x \cos x = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2) 6(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x = 6$$

$$3) 3(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x + 3 = 0$$

$$4) \sin x - \cos x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0$$

$$5) \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$$

Bài 2. Giải các phương trình:

$$1) \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 1.$$

$$2) (1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$3) \cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

$$4) \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$5) \sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1.$$

$$6) (1 + \sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sqrt{2}.$$

$$7) \sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$8) |\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1.$$

$$9) 1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2} \sin x.$$

$$10) \sin x \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x = 2.$$

$$11) 2 \sin 2x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ | 11) $\sin(2x - 3) = \sin(x + 1)$ |
| 2) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 12) $\tan(3x + 2) + \cot 2x = 0$ |
| 3) $\tan(x + 60^\circ) = -\sqrt{3}$ | 13) $\sin 3x = \cos 4x$ |
| 4) $\cot\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right) = \frac{1}{3}$ | 14) $\tan 3x \cdot \tan x = 1$ |
| 5) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ | 15) $\sin(2x + 50^\circ) = \cos(x + 120^\circ)$ |
| 6) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$ | 16) $\sqrt{3} - 2\sin 2x = 0$ |
| 7) $\cos(3x + 20^\circ) = \sin(40^\circ - x)$ | 17) $2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$ |
| 8) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ | 18) $3\tan\left(\frac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0$ |
| 9) $\sin(2x - 10^\circ) = \frac{1}{2}$ với $-120^\circ < x < 90^\circ$ | 19) $2\sin x - \sqrt{2}\sin 2x = 0$ |
| 10) $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$ | 20) $8\cos^3 x - 1 = 0$ |

Bài 2. Giải các phương trình:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ | 11) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ |
| 2) $\cos^2 3x = 1$ | 12) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos x + \sqrt{2}\right)\tan 2x = 0$ |
| 3) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ | 13) $(2\sin x + 1)^2 - (2\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{3}{2}\right) = 0$ |
| 4) $\sin x + \cos x = 1$ | 14) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ |
| 5) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$ | 15) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ |
| 6) $\cos 2x \cdot \cos 5x = \cos 7x$ | 16) $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$ |
| 7) $\sin 3x \cdot \cos 7x = \sin 13x \cdot \cos 17x$ | 17) $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$ |
| 8) $\sin 4x \cdot \sin 3x = \cos x$ | 18) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ |
| 9) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0$ | 19) $\sin 3x \cdot \sin 5x = \sin 11x \cdot \sin 13x$ |
| 10) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ | 20) $\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}$ |

Bài 3. Giải các phương trình:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ | 2) $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 = 0$ |
|----------------------------------|----------------------------------|

$$3) \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) + 2\cot\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - 3 = 0 \quad 4)$$

$$\frac{2}{\sin^2 2x} + (3 - \sqrt{3})\cot 2x - 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$5) \cot^2 x - 4\cot x + 3 = 0$$

$$6) \cos^2 2x + \sin 2x + 1 = 0$$

$$7) \sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$$

$$8) 4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$9) \tan^4 x + 4\tan^2 x + 3 = 0$$

$$10) \cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$$

$$11) \frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$1) 3\sin x + 4\cos x = 5$$

$$2) 2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$$

$$3) 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$4) 3\cos x + 4\sin x + \frac{2}{3\cos x + 4\sin x - 6} = 3$$

$$5) 2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$6) \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$$

$$7) 4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$$

Bài 6. Giải các phương trình:

$$1) 2(\sin x + \cos x) - 4\sin x \cos x - 1 = 0$$

$$2) \sin 2x - 12(\sin x + \cos x) + 12 = 0$$

$$3) \sin x - \cos x + 4\sin x \cos x + 1 = 0$$

$$4) \cos^3 x + \sin^3 x = 1$$

$$5) 3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 2 = 0$$

$$6) \sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 5 = 0$$

$$7) 2(\sin x - \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$$

$$8) \sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = 1$$

$$9) 2\sin 2x + \sqrt{3}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$$

$$10) (\sin x - \cos x)^2 + (\sqrt{2} + 1)(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} = 0$$

Bài 7. Giải các phương trình

$$1) \sin^2 x - 10\sin x \cos x + 21\cos^2 x = 0$$

$$2) \cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$$

$$3) \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

$$4) 3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$$

$$5) 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$$

$$6) 2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = 1$$

$$7) 2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$8) \cos^2 2x - 7\sin 4x + 3\sin^2 2x = 3$$

Bài 8. Giải các phương trình

$$1) 4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$2) \tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - 3 = 0$$

3) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$

4) $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$

5) $2\cos 6x + \tan 3x = 1$

6) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$

Bài 9. Giải các phương trình

1) $\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \sin 3x \sin 9x = 1$

2) $\cos 2x - \sin 2x \sin 4x - \cos 3x \cos 9x = 1$

3) $\cos 2x + 2\sin x \sin 2x = 2\cos x$

4) $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cos 2x + 3\cos^2 x + 1$

5) $\cos 4x + \sin 3x \cos x = \sin x \cos 3x$

6) $\sin(4x + \frac{\pi}{4}) \sin 6x = \sin(10x + \frac{\pi}{4})$

7) $(1 + \tan^2)(1 + \sin 2x) = 1$

8) $\tan(\frac{2\pi}{3} - x) + \tan(\frac{\pi}{3} - x) + \tan 2x = 0$

Bài 10. Giải các phương trình

1) $(1 - \cos 2x) \sin 2x = \sqrt{3} \sin^2 x$

2) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x$

3) $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \cot x}{2(1 + \cot x)}$

4) $1 - (2 + \sqrt{2}) \sin x = \frac{-2\sqrt{2}}{1 + \cot^2 x}$

5) $\tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$

6) $2(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$

7) $\cos x(1 - \tan x)(\sin x + \cos x) = \sin x$

8) $(1 + \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

9) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

Bài 10. Giải các phương trình

1) $\sin x + \cos x - \frac{\sin 2x}{3} - 1 = 0$

2) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - (1 + \sqrt{2}) = 0$

3) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$

4) $\frac{1 + \cos x}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

D. MỘT SỐ BÀI THI ĐẠI HỌC VỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Giải các phương trình

1) $(1 + \tan x)\cos^3 x + (1 + \cot x)\sin^3 x = \sqrt{2\sin 2x}$

2) $\tan^2 x - \tan x \tan 3x = 2$

3) $\sqrt{5 - 3\sin^2 x} - 4\cos x = 1 - 2\cos x$

4) $\cos 3x \tan 5x = \sin 7x$

5) $\tan x + \cot x = 4$

6) $\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0$

7) $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$

8) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$

9) $2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1$

10) $\frac{\cot^2 x - \tan^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$

11) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$

12) $\cos 10x + \cos^2 4x + 6\cos 3x \cos x = \cos x + 8\cos x \cos^2 3x$

13) $\sin^2 x \cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \sin x$

14) $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$

15) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot(x + \frac{\pi}{3}) \cot(\frac{\pi}{6} - x)$

16) $\frac{\sin x \cot 5x}{\cos 9x} = 1$

17) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \sin^3 4x$

18) $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$

19) $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

20) $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}(\tan x + \cot x)$

21) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin x$

22) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 3x$

23) $\sqrt{3} \sin 2x - 2\cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$

24) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^3 x \cot x + \cos^3 x \tan x = \sqrt{2\sin 2x}$

25) $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1$

26) $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cos^2 2x}$

Bài 2. Giải các phương trình

- 1) $\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{5}{8}$
- 2) $4\sin^3x + 3\cos^3x - 3\sin x - \sin^2x\cos x = 0$
- 3) $\cos^3x - \sin^3x - 3\cos x\sin^2x + \sin x = 0$
- 4) $\frac{(1 - \cos x)^2 + (1 + \cos x)^2}{4(1 - \sin x)} - \tan^2x\sin x = \frac{1 + \sin x}{2} + \tan^2x$
- 5) $\sin^2x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$
- 6) $\cos^6x + \sin^6x = \frac{7}{16}$

Bài 3. Giải các phương trình

- 1) $\frac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$
- 2) $\frac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$
- 3) $\frac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$
- 4) $\sin 4x = \tan x$
- 5) $\cos 2x + \sin^2 x 2\cos x + 1 = 0$
- 6) $\sin 3x + 2\cos 2x - 2 = 0$
- 7) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$
- 8) $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0$
- 9) $3(\tan x + \cot x) = 2(2 + \sin 2x)$
- 10) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8\cos x$

Bài 4. Giải phương trình lượng giác

- 1) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 3 - \frac{3}{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$
- 2) $3\sin 3x - \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$
- 3) $\cos 7x \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \sin 5x$
- 4) $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$
- 5) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$
- 6) $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3} \cos 3x$
- 7) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cos 2x$
- 8) $2\sqrt{2} (\sin x + \cos x)\cos x = 3 + 9\sin^3 x$
- 9) $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$

Bài 5. Giải các phương trình (biến đổi đưa về dạng tích)

- 1) $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^2 x = 2\sin x \cos 2x$
- 2) $\sin^2 2x + \cos^2 8x = \frac{1}{2} \cos 10x$
- 3) $(2\sin x + 1)(2\sin 2x - 1) = 3 - 4\cos^2 x$
- 4) $\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$
- 5) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
- 6) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$
- 7) $(\cos x - \sin x)\cos x \sin x = \cos x \cos 2x$

- 8) $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$
- 9) $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$
- 10) $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$
- 11) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$
- 12) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$
- 13) $\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = \sin 2x$
- 14) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$
- 15) $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x$
- 16) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$
- 17) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$
- 18) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$
- 19) $\sin^2 x = \cos^2 2x + \cos^2 3x$
- 20) $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$
- 21) $1 + \sin x + \cos x = \sin 2x + \cos 2x = 0$
- 22) $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x + \cos 2x$
- 23) $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$
- 24) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$
- 25) $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$
- 26) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$
- 27) $\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x$

Bài 6. Giải các phương trình

- 1) $\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x$ với $0 < x < 2\pi$
- 2) $\sin\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) - 3\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = 1 + 2\sin x$ với $\frac{\pi}{2} < x < 3\pi$
- 3) $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x = -\sqrt{2}$ với $\frac{2\pi}{5} < x < \frac{6\pi}{7}$

Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của:

- 1) $y = 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x$
- 2) $y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$
- 3) $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$
- 4) $y = \sin x - \cos^2 x + \frac{1}{2}$

Bài 8 (Các đề thi ĐH, CĐ mới).

- 1) A_02. Giải phương trình: $5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$
- 2) D_02. Tìm các nghiệm thuộc $[0; 14]$ của phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

3) A_03. Giải phương trình: $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$

4) D_03. Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

5) D_04. Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

6) A_05. Giải phương trình: $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

7) D_05. Giải phương trình: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

8) A_05_dự bị 1. Tìm nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$ của phương trình:

$$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

9) A_05_dự bị 2. Giải pt: $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

10) D_05_dự bị 1. Giải pt: $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$

11) D_05_dự bị 2. Giải pt: $\sin 2x + \cos 2x - 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

12) A_06_dự bị 1. Giải pt: $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$

13) A_06_dự bị 2. Giải pt: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

14) B_06_dự bị 1. Giải pt: $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$

15) B_06_dự bị 2. Giải pt: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

16) D_06_dự bị 1. Giải pt: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$

17) D_06. Giải pt: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

18) A_07. Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$

19) B_07. Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

21) D_07. Giải phương trình: $\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$

22) CD_07. Giải phương trình: $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3} \cos 4x = 4\cos^2 x - 1$

23) A_08. Giải phương trình: $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$

24) B_08. Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x$

25) D_08. Giải phương trình: $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

26) CD_08. Giải pt: $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2\sin 2x$

CHUYÊN ĐỀ 2 ĐẠI SỐ TỔ HỢP

A. MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

I) QUY TẮC CÔNG VÀ QUY TẮC NHÂN:

Bài 1: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu:

1) Số lẻ gồm 4 chữ số khác nhau?

2) Số chẵn gồm 4 chữ số bất kỳ?

Bài 2: Có 4 con đường nối liền điểm A và điểm B, có 3 con đường nối liền điểm B và điểm C. Ta muốn đi từ A đến C qua B, rồi từ C trở về A cũng đi qua B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lộ trình đi và về nếu ta không muốn dùng đường đi làm đường về trên cả hai chặng AB và BC?

Bài 3: Có 5 miếng bìa, trên mỗi miếng ghi một trong 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Lấy 3 miếng bìa này đặt lần lượt cạnh nhau từ trái sang phải để được các số gồm 3 chữ số. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có nghĩa gồm 3 chữ số và trong đó có bao nhiêu số chẵn?

Bài 4: Cho 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

Bài 5: Một người có 6 cái áo, trong đó có 3 áo sọc và 3 áo trắng; có 5 quần, trong đó có 2 quần đen; và có 3 đôi giày, trong đó có 2 đôi giày đen. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn mặc áo - quần - giày, nếu:

1) Chọn áo, quần và giày nào cũng được.

2) Nếu chọn áo sọc thì với quần nào và giày nào cũng được; còn nếu chọn áo trắng thì chỉ mặc với quần đen và đi giày đen.

II) HOÁN VI - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP:

Bài 1: Có n người bạn ngồi quanh một bàn tròn ($n > 3$). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho:

1) Có 2 người ấn định trước ngồi cạnh nhau.

2) 3 người ấn định trước ngồi cạnh nhau theo một thứ tự nhất định

Bài 2: Một đội xây dựng gồm 10 công nhân và 3 kỹ sư. Để lập một tổ công tác cần chọn 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Bài 3: Trong một lớp học có 30 học sinh nam, 20 học sinh nữ. Lớp học có 10 bàn, mỗi bàn có 5 ghế. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi nếu:

a) Các học sinh ngồi tùy ý.

b) Các học sinh ngồi nam cùng 1 bàn, các học sinh nữ ngồi cùng 1 bàn

Bài 4: Với các số: 0, 1, 2, ..., 9 lập được bao nhiêu số lẻ có 7 chữ số.

Bài 5: Từ hai chữ số 1; 2 lập được bao nhiêu số có 10 chữ số trong đó có mặt ít nhất 3 chữ số 1 và ít nhất 3 chữ số 2.

Bài 6: Tìm tổng tất cả các số có 5 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5

Bài 7: Trong một phòng có hai bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 học sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu:

1) Các học sinh ngồi tùy ý.

2) Các học sinh nam ngồi một bàn và các học sinh nữ ngồi một bàn.

Bài 8: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 6, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số chia hết cho 3 và gồm 5 chữ số khác nhau

Bài 9: Từ các chữ cái của câu: "TRƯỜNG THPT LÝ THƯỜNG KIỆT" có bao nhiêu cách xếp một từ (*từ không cần có nghĩa hay không*) có 6 chữ cái mà trong từ đó chữ "T" có mặt đúng 3 lần, các chữ khác đôi một khác nhau và trong từ đó không có chữ "Ê"

Bài 10: Cho A là một tập hợp có 20 phần tử.

a) Có bao nhiêu tập hợp con của A?

b) Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của A mà có số phần tử là số chẵn?

Bài 11: 1) Có bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2) Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 mà các số đó nhỏ hơn số 345?

Bài 12: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có 6 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau?

Bài 13: Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dự Đại hội cháu ngoan Bác Hồ, sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Bài 14: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và không lớn hơn 789?

Bài 15: 1) Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Hỏi có thể thành lập được bao nhiêu số có bảy chữ số từ những chữ số trên, trong đó chữ số 4 có mặt đúng ba lần, còn các chữ số khác có mặt đúng một lần.

2) Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ 8 người sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất hai học sinh khá.

Bài 16: Số nguyên dương n được viết dưới dạng: $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$

Trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các số tự nhiên

1) Hỏi số các ước số của n là bao nhiêu?

2) Áp dụng: Tính số các ước số của 35280.

III) TOÁN VỀ CÁC SỐ P_n, A_n^k, C_n^k :

Bài 1: Giải bất phương trình: $\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \frac{1}{14P_3}$

Bài 2: Tìm các số âm trong dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ với: $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$

Bài 3: Cho k, n là các số nguyên và $4 \leq k \leq n$; Chứng minh:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$$

Bài 4: Cho $n \geq 2$ là số nguyên. Chứng minh: $P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + (n-1)P_{n-1}$

Bài 5: Cho k và n là các số nguyên dương sao cho $k < n$. Chứng minh rằng:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$$

VI) NHI THỨC NEWTON:

Bài 1: Chứng minh rằng: $C_n^1 3^{n-1} + 2.C_n^2 3^{n-2} + 3.C_n^3 3^{n-3} + \dots + n.C_n^n = n.4^{n-1}$

Bài 2: Khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng từ biểu thức:

$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14} \text{ ta sẽ được đa thức: } P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{14}x^{14}$$

Hãy xác định hệ số A_9

Bài 3: 1) Tính $\int_0^1 (1+x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$

2) Từ kết quả đó chứng minh rằng: $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Bài 4: Chứng minh rằng: $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$

Bài 5: Tính tổng $S = C_n^1 - 2.C_n^2 + 3.C_n^3 - 4.C_n^4 + \dots + (-1)^{n-1}n.C_n^n \quad (n \geq 2)$

Bài 6: Chứng minh rằng: $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \dots + C_{16}^{16} = 2^{16}$

Bài 7: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức sau thành đa thức:

$$f(x) = (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7$$

Bài 8: Trong khai triển của $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \text{ Hãy tìm hệ số } a_k \text{ lớn nhất } (0 \leq k \leq 10)$$

Bài 9: Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$.

Bài 10: CMR: $C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \dots + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000} (2^{2001} - 1)$

Bài 11: Với mỗi n là số tự nhiên, hãy tính tổng:

$$1) C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n$$

$$2) C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 \cdot 2 + \frac{1}{3}C_n^2 \cdot 2^2 + \frac{1}{4}C_n^3 \cdot 2^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n \cdot 2^n$$

Bài 12: Cho đa thức $P(x) = (3x - 2)^{10}$

1) Tìm hệ số của x^2 trong khai triển trên của $P(x)$

2) Tính tổng của các hệ số trong khai triển trên của $P(x)$

Bài 13: Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức: $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024 hãy tìm hệ số a (a là số tự nhiên) của số hạng $a \cdot x^{12}$ trong khai triển đó.

Bài 14: Trong khai triển nhị thức: $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ hãy tìm số hạng không phụ thuộc

vào x biết rằng: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

Bài 15: Chứng minh:

$$2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-1}C_n^2 + 3 \cdot 2^{n-3}C_n^3 + 4 \cdot 2^{n-4}C_n^4 + \dots + nC_n^n = n \cdot 3^{n-1}$$

Bài 16: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức: $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} \cdot x$

$\neq 0$

Bài 17: Khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{2}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} 2^{\frac{-x}{2}} + \dots + C_n^{n-1} 2^{\frac{x-1}{2}} \left(2^{\frac{-x}{2}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{2}}\right)^n$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm n và x

Bài 18: Trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^{21}$ Tìm số hạng chứa a, b có số mũ bằng

nhau.

B. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với các chữ số 0,1,2,3,4,5, có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau?

Bài 2. Dùng 5 chữ số 2,3,4,6,8 để viết thành số gồm 5 chữ số khác nhau. Hỏi:

- Bắt đầu bởi chữ số 2.
- Bắt đầu bởi chữ số 36
- Bắt đầu bởi chữ số 482

Bài 3. Dùng 6 chữ số 1,2,3,4,5,6 để viết thành số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau. Hỏi:

- Có bao nhiêu số như vậy
- Có bao nhiêu số bắt đầu bởi chữ số 1

Bài 4. Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 4.

Bài 5. Với các chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Bài 6. Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 thiết lập tất cả các số có 9 chữ số khác nhau. Hỏi trong các số thiết lập được có bao nhiêu số mà chữ số 9 đứng chính giữa.

Bài 7. Cho $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 4 chữ số khác nhau.

Bài 8.

- Từ các chữ số 4,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt.
- Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 9. Cho tập $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5?

Bài 10. Một tập thể gồm 14 người gồm 6 nam và 8 nữ, người ta muốn chọn 1 tổ công tác gồm 6 người. Tìm số cách chọn sao cho trong tổ phải có cả nam và nữ?

Bài 11. Một nhóm học sinh gồm 10 người, trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh trên thành 1 hàng dọc sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau?

Bài 12. Có một hộp đựng 2 viên bi đỏ, 3 viên bi trắng, 5 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi lấy từ hộp đó.

Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số viên bi lấy ra không đủ 3 màu?

Bài 13. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người có ít nhất một cán bộ lớp?

Bài 14. Một đội văn nghệ có 20 người trong đó có 10 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho:

- Có đúng 2 người nam trong 5 người đó
- Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó

Bài 15. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lý nam. Lập một đoàn công tác cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà Toán học và nhà Vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?

Bài 16. Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn ra để lập một tổ ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.

1. Nếu phải có ít nhất 2 nữ.
2. Nếu phải chọn tùy ý.

Bài 17. Một tổ học sinh gồm 7 nam và 4 nữ. Giáo viên muốn chọn 3 học sinh xếp vào bàn ghế của lớp, trong đó có ít nhất 1 nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Bài 18. Chứng minh rằng:

$$C_n^1 \cdot 3^{n-1} + 2C_n^2 \cdot 3^{n-2} + \dots + 3C_n^3 \cdot 3^{n-3} + \dots + nC_n^n = n \cdot 4^{n-1}.$$

Bài 19. Chứng minh rằng:

$$C_{2002}^0 C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1 C_{2001}^{2000} + \dots + C_{2002}^k C_{2002-k}^{2001-k} + \dots + C_{2002}^{2001} C_1^0 = 1001 \cdot 2^{2002}$$

Bài 20. Với n là số nguyên dương, chứng minh hệ thức sau:

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$$

Bài 21. Chứng minh rằng:

$$2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + 3 \cdot 2^{n-3} C_n^3 + 4 \cdot 2^{n-4} C_n^4 + \dots + n C_n^n = n \cdot 3^{n-1}$$

Bài 22. Tính tổng:

$$S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n C_n^n$$

Bài 23. Tính tổng:

$$C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^2-1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n$$

Bài 24. Chứng minh rằng:

$$C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + \dots + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000} (2^{2001} - 1)$$

Bài 25. Cho n là một số nguyên dương:

a. Tính : $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$

b. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n$$

Bài 26. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2 \cdot C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1) \cdot 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

Bài 27. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$$

Bài 28. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + \dots + C_{2n}^2 \cdot 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n-2} \cdot 3^{2n-2} + C_{2n}^{2n} \cdot 3^{2n} = 2^{15} (2^{16} + 1)$$

Bài 29. Tính tổng:

$$S = \frac{1 \cdot C_n^0}{A_1^1} + \frac{2 \cdot C_n^1}{A_2^1} + \frac{3 \cdot C_n^2}{A_3^1} + \dots + \frac{(n+1) \cdot C_n^n}{A_{n+1}^1},$$

biết rằng, với n là số nguyên dương:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 211$$

Bài 30. Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243.$$

Bài 31. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của:

$$[1+x^2(1-x)]^8$$

Bài 32. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của: $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$.

Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$

Bài 33. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$

Biết rằng: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$

Bài 34. Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Newton của:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 \quad \text{với } x > 0$$

Bài 35. Tìm số hạng thứ 7 trong khai triển nhị thức:

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{2})^{15}; x > 0$$

Bài 36. Cho :

$$A = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{20} + \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{10}$$

Sau khi khai triển và rút gọn thì biểu thức A sẽ gồm bao nhiêu số hạng?

Bài 37. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton của

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n, \text{ biết rằng: } C_{n+2}^n + C_{n+2}^{n+1} = 7(n+3)$$

Bài 38. khai triển biểu thức $(1 - 2x)^n$ ta được đa thức có dạng:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Tìm hệ số của x^5 , biết $a_0 + a_1 + a_2 = 71$

Bài 39. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển đa thức:

$$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$$

Bài 40. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$

Biết rằng: $C_n^1 + C_n^3 = 13n$

Bài 41. Giải các phương trình:

$$C_4^x + C_5^x = C_6^x + \frac{2}{P_x}$$

$$2(C_x^2 + C_x^3) = 3x^2 - 5x$$

$$2A_x^2 = C_x^{x-1} + 23x$$

$$2.(A_n^4)^2 - 5.A_n^3.A_n^4 - 320A_n^4 + 800A_n^3 = 0$$

Bài 42. Giải các hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_y^x : C_{y+2}^x = \frac{1}{3} \\ C_y^x : A_y^x = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A_x^y + C_x^y = 50 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$$

Bài 43. Giải các bất phương trình:

$$A_x^3 + 5.A_x^2 \leq 21x$$

$$C_{2x-3}^{6-x} + C_{3x+1}^{5-x} < 124$$

$$\frac{P_{n+4}}{(n-k)!} \leq 6A_{n+3}^{k+2}$$

$$C_{x+1}^{6-x} + A_{2x+1}^{x-2} < 586$$

$$C_n^5 + 2C_n^4 - 4C_n^3 < n^2 + 1$$

$$C_n^3 - 3C_n^2 + 2C_n^1 < 0$$

$$\frac{P_{n+5}}{(n-k)!} < 60A_{n+3}^{k+4}$$

$$C_n^5 + 2C_n^4 - 4C_n^3 < n^2 + 1$$

CHUYÊN ĐỀ 3. PHƯƠNG PHÁP QUY nạp TOÁN HỌC

Bài 1. Chứng minh rằng

a) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$

b) $3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$ với $n \in \mathbb{N}^*$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

e) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

f) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ với $n \in \mathbb{N}^*$

g) $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

h) $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n + 1) = n(n+1)^2$ với $n \in \mathbb{N}^*$

i) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ với $n \geq 2$

k) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ với $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3

b) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ chia hết cho 9

c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6

d) $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6

e) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9

f) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7

g) $n^7 - n$ chia hết cho 7

h) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3

Bài 3. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $2^{n+2} > 2n + 5$ với $n \in \mathbb{N}^*$

b) $2^n > 2n + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$

c) $3^n > n^2 + 4n + 5$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$

d) $2^{n-3} > 3n - 1$ với $n \geq 8$

e) $3^{n-1} > n(n + 2)$ với $n \geq 4$

CHUYÊN ĐỀ 4: DÃY SỐ

Dạng 1. Xác định một số hạng của dãy số. Xác định số hạng tổng quát

Bài 1. Viết 5 số hạng đầu của dãy số sau:

a) $u_n = \frac{2n - 1}{n - 1}$

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$

b) $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n+1} \end{cases} \quad (n > 2)$

c) $u_n = \frac{3n - 1}{2n + 3}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{n} & \text{khi } n = 2k \\ \frac{n-1}{n} & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases} \quad (\text{với } k \geq 1)$

e) $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1)$

g) $u_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

h) $n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$

Bài 2. Tìm số hạng tổng quát của dãy số

a) (u_n) : 1; 2; 4; 8; 16; ...

b) (u_n) : $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$

c) (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \quad (\text{với } n \geq 1)$

d) (u_n) : $\frac{3}{4}; -\left(\frac{6}{7}\right)^2; \left(\frac{9}{10}\right)^3; -\left(\frac{12}{13}\right)^4; \dots$

Bài 3. Cho dãy số (u_n) : $u_1 = \frac{1}{3}, u_{n+1} = 4u_n + 7$ với $n \geq 1$

a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5, u_6

b) Chứng minh rằng: $u_n = \frac{2^{2n+1} - 7}{3}$ với $n \geq 1$

Bài 4. Cho dãy số (u_n) : $u_1 = 1; u_{n+1} = u_n + 7$ với $n \geq 1$

a) Tính u_2, u_3, u_4, u_5, u_6

b) Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6$

Bài 5. Cho (u_n) : $u_1 = 2; u_{n+1} = 3u_n + 2n - 1$

Chứng minh rằng: $u_n = 3^n - n$

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của một dãy số

Bài 6. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau

a) $u_n = \frac{n+1}{n}$;

b) $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

c) $u_n = \frac{n+1}{n-2}$

d) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$

e) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

f) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

g) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

h) $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$

Dạng 4. Xét tính bị chặn của dãy số

Bài 7. Xét tính bị chặn của các dãy số

a) $u_n = 2n - 1$

b) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

c) $u_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$

d) $u_n = \frac{3n^2 - 2}{n^2 + 1}$

e) $u_n = \frac{n-7}{2n+3}$

f) $u_n = \frac{3n^2 + 3n + 8}{n^2 + n + 3}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. tìm cở giới hạn sau:

1. $\lim \frac{2n+1}{n+1}$

4. $\lim \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(6n+1)^3}$

7. $\lim \frac{n(2n+1)}{(6n+1)^3}$

2. $\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}$

5. $\lim \frac{n+1}{n^2+2}$

8. $\lim \frac{n^3+2}{n+1}$

3. $\lim \frac{n^3+4}{5n^3+n+8}$

6. $\lim \frac{n+4}{n^2-3n+2}$

9. $\lim \frac{n(2n+1)(3n^2+2)}{(6n+1)^3}$

Bài 2. tìm cở giới hạn sau:

1. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+3}$

4. $\lim \frac{\sqrt{n}-2}{n+\sqrt{n}+1}$

7. $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{n^3+1} + n\sqrt{n}}{n\sqrt{n^2+1}+3}$

2. $\lim \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+2}+2}$

5. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}+2}{n+2}$

3. $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

6. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-1}{\sqrt{n^2+3}-2}$

Bài 3. tìm cở giới hạn sau:

1. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

4. $\lim(\sqrt{n^2-4n}-n)$

2. $\lim(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2-n})$

5. $\lim(n-\sqrt{n^2+3})$

3. $\lim(\sqrt{3n^2+2n-1}-\sqrt{3n^2-4n+8})$

6. $\lim(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

7. $\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$

9. $\lim \frac{n+\sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$

8. $\lim(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})$

10. $\lim(\sqrt[3]{n^3-3n^2+1}-\sqrt{n^2+4n})$

Bài 4. tìm cở giới hạn sau:

1. $\lim \frac{1-4^n}{1+4^n}$

3. $\lim \frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$

5. $\lim \frac{-3n^2+4n+1}{n^2 2^n}$

2. $\lim \frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$

4. $\lim \frac{2^n+6^n-4^{n+1}}{3^n+6^{n+1}}$

Bài 5. tìm cở giới hạn sau:

1. $\lim \frac{\sin n\pi}{n+1}$

2. $\lim \frac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2 + 2n}$

5. $\lim \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$

Bài 6 tìm cở giới hạn sau:

1.
$$\lim \frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{3n^2+4}$$

3.
$$\lim \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$$

6.
$$\lim \frac{n + \sin n}{3n+4}$$

2.
$$\lim \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2-3}$$

4.
$$\lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} \right)^n$$

6.
$$\lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right]$$

CHUYÊN ĐỀ 5 . GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Tìm các giới hạn sau (dạng $\frac{0}{0}$):

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^2 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 1}{3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau (dạng $\frac{0}{0}$):

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{3 - \sqrt{x + 7}}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{\sqrt{x + 3} - 2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2}$

7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 7} - 5}{x - 2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{x}$

11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 2) - \sqrt{4x^2 - x - 2}}{x^2 - 3x + 2}$

12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 2} - \sqrt{3x + 1}}{x - 1}$

13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} + \sqrt{x + 16} - 7}{x}$

15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{x^2 - 1}$

Bài 3. Tìm các giới hạn (dạng $\frac{0}{0}$):

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 3x + 2}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1 + x} - \sqrt[3]{8 - x}}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x + 11} - \sqrt[3]{8x + 43}}{2x^2 + 3x - 2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7 + x^3} - \sqrt{3 + x^2}}{x - 1}$

6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} - \sqrt{5 - x^2}}{x - 1}$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \sqrt[3]{1+6x} - 1}{x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

Bài 4. Tìm các giới hạn (dạng $\frac{\infty}{\infty}$):

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + x + 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^2 (4x+7)^3}{(3x^3+1)(10x^2+9)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+3\sqrt{1-x}}{1-x}$$

Bài 5. Tìm các giới hạn ($\infty - \infty$):

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \right]$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x-5) - \sqrt{4x^2-4x-1} \right]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\sqrt{4x^2+9} + 2x \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\sqrt{3x^4+5} - \sqrt{3x^4-2} \right]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\sqrt{3x^4+5} - \sqrt{3x^4-2} \right]$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+2} - \sqrt{x^2+1} \right]$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{4x^2+5} - \sqrt[3]{8x^3-1} \right]$$

CHUYÊN ĐỀ 6. ĐẠO HÀM**I. Tính đạo hàm bằng định nghĩa****Bài 1.** Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm:

1) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ tại $x = 1$

2) $f(x) = \sin x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$

3) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ tại $x = 1$

4) $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ tại $x = 0$

5) $f(x) = x^2 + 3|x - 1|$ tại $x = 2$

6) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{4x^2 + 8} - \sqrt{8x^2 + 4}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

7) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Bài 2. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = 5x - 7$

2) $y = 3x^2 - 4x + 9$

3) $y = \sqrt[3]{x - 1}$

4) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$

5) $y = x^3 + 3x - 5$

6) $y = \sqrt{x} + x$

II. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng hàm số liên tục trên \mathbb{R} nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

1) Chứng minh rằng hàm số liên tục trên \mathbb{R} 2) Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ không? Tại sao?.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x = 0$

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{khi } x \leq 3 \\ 4x - 1 & \text{khi } x > 3 \end{cases}$

Tìm a để hàm số không có đạo hàm tại $x = 3$.

III. Tính đạo hàm bằng công thức:

Bài 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

2) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

3) $y = (x^2 + 1)(3 - 2x^2)$

4) $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

5) $y = (x^2 + 3)^5$

6) $y = x(x + 2)^4$

7) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

8) $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)^2(x^4 + 1)^3$

Bài 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

1) $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}$

2) $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$

3) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$

4) $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{x - 1}$

5) $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

6) $y = \frac{4}{2 - x}$

7) $y = \frac{2x - 3}{x + 4}$

8) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = \frac{2}{x} + 5\sqrt{x}$

2) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

3) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}$

4) $y = \sqrt{x + 2} + \sqrt{4 - x}$

5) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}$

6) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

7) $y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8) $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - 2x^2}$

III. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại một điểm

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (C)

- Viết phương trình tiếp tuyến Δ với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là $x = 2$.
- Chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất

Bài 12. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (C)

- Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm có hoành độ là $x = 0$
- Chứng minh rằng tiếp tuyến Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

Bài 13.

- 1) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hs: $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $(-1; -2)$
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm

có hoành độ $x = 0$

IV. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) khi biết hệ số góc k.

Bài 14.

- 1) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2x + 1}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$.
- 2) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x = 3$ biết:
- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$
 - Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{3x - 2}{x - 1}$ (C)

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết:

- Hoành độ của tiếp điểm là $x = 0$
- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -x + 3$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $4x - y + 10 = 0$
- Biết hệ số góc của tiếp tuyến là $-\frac{1}{9}$

V. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm:

Bài 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C)

- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ điểm $A(0; 2)$
- Tìm trên đường thẳng $y = 2$ các điểm để từ đó có thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Bài 17. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = f(x)$ biết:

- $f(x) = 3x - 4x^3$ và tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 3)$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ và tiếp tuyến đi qua điểm $B(0; \frac{3}{2})$
- $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$ và tiếp tuyến đi qua điểm $C(0; 1)$

Bài 18.

- Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x + 1}$ (C). Chứng minh rằng qua điểm $A(1; -1)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.
- Tìm m để từ $M(m; 0)$ kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x + 2}{x - 1}$ sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục Ox .